Variationen über das Ziegenproblem

Friedrich Barth und Rudolf Haller, München

Zusammenfassung: *Das Bearbeiten und Lösen von Problemen gehört zum täglichen Geschäft von Mathematikern. Leider ist dabei ein u. U. entstandenes Ergebnis, vor allem bei Aufgaben, die uns die Realität stellt, oft weder einfach noch eindeutig. Einerseits kann es sein, dass die Aufgabenstellung nicht klar genug ist, andererseits machen Bearbeiter manchmal explizit oder auch implizit zusätzliche Annahmen, die das Ergebnis beeinflussen. In unserem Beitrag wollen wir an einem überschaubaren Beispiel, dem sogenannten Ziegenproblem, zeigen, welchen Einfluss solche Annahmen und die gewählten mathematischen Modelle auf das Ergebnis haben können.*

0 Vorbemerkung

Für die Vermittlung von Mathematik ist die Aufgabendidaktik von nicht zu überschätzender Bedeutung. Im Folgenden werden einige Aspekte, die uns wichtig erscheinen, besonders hervorgehoben. Gute Aufgaben sollen bei einer typischen Problemstellung das Verständnis vertiefen und den aktiven Umgang mit der jeweiligen Materie erleichtern. Variationen der Aufgabenstellung durch unterschiedliche Einkleidungen oder Interpretationen des Ausgangsproblems liefern verschiedene Blickwinkel und Beleuchtungen und machen so die Struktur des Problems durchschaubarer. Weil die Wirklichkeit meist viel zu komplex ist, verwendet man, wie in den Naturwissenschaften üblich, gerne vereinfachte Modelle, auch auf die Gefahr hin, dass die Ergebnisse nur näherungsweise richtig sind oder, um mit dem Ökonomen, Politiker und Mathematiker John Maynard Keynes zu sprechen, *„It is better to be roughly right than precisely wrong.“* Die Einbindung in einen Sachzusammenhang (oft als Pseudo-Anwendungsaufgabe mit Aktualitätsbezug) soll beim Bearbeiter Interesse wecken, wenn sie auch manchmal an den Haaren herbeigezogen ist. Künstliche Situationen heben oft das Wesentliche hervor, ohne durch zu viel Komplexität zu verwirren. Nützliche anschauliche Hilfsmittel wie z. B. der in diesem Artikel verwendete Baum erleichtern die Bearbeitung. Sie machen Gedankengänge sichtbar und helfen auch bei anderen Aufgabenstellungen. Bei manchen Problemen der Stochastik besteht die Schwierigkeit weniger in der technischen Komplexität als darin, dass die Situation nicht genau genug beschrieben ist oder der Einfluss des Umfelds unterschätzt wird. Für die „richtige“ Lösung spielt das jedoch oft eine entscheidende Rolle. So kann es von Bedeutung sein, was die beteiligten Personen wissen und welche Entscheidungen sie gegebenenfalls treffen werden. Ein gutes Beispiel hierfür ist das sogenannte Ziegenproblem, das überschaubar einfach ist und doch verwirrend genug sein kann. Es sollte uns bei der Behandlung komplexerer Probleme nachdenklich machen, wenn schon eine so einfache Fragestellung so viele Varianten und Lösungsmöglichkeiten zulässt. Nicht von ungefähr sind Texte von stochastischen Aufgaben daher oft so umfangreich. Trotzdem sorgen sie hin und wieder für Missverständnisse und damit für widersprüchliche „richtige“ Lösungen.

1 Prolog

Die Fernsehsendung „Wer weiß denn so was?“ mit Kai Pflaume wurde in der ARD am 6. Juli 2015 zum ersten Mal gesendet und steht seitdem immer wieder mal auf dem Vorabendprogramm.

Zwei Teams, H (Hoëcker & Gast 1) und E (Elton & Gast 2), werden kuriose Fragen gestellt und dazu drei Antworten vorgegeben. Sie müssen abwechselnd aus diesen Antworten die einzig richtige Antwort finden, für die jeweils 500 € auf ihr Teamkonto fließen. Bei der schließlich entscheidenden Masterfrage setzt jedes Team einen Teil des bis dahin gewonnenen Geldes ein und entscheidet sich dann für eine Antwort. Gewinner ist, wer letztlich mehr Geld auf seinem Gewinnkonto hat.

Öfters haben beide Teams keine Ahnung. Die Chancen für eine richtige Antwort sind dann für H und E gleich, nämlich $\frac{1}{3}$. Wir betrachten die Situation: H wählt Antwort 1, E Antwort 3.

Der Moderator Kai Pflaume sagt daraufhin, er habe eine gute Nachricht: Antwort 2 ist falsch. Es bleiben also nur noch die Antworten 1 und 3 für die Rateteams. Daher könnte H überlegen: Die Information ist nichts wert, weil sie der Moderator sicher nicht gegeben hätte, wenn Antwort 2 richtig wäre. Also hat sich an der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ nichts geändert. Genauso könnte E überlegen.

Wo ist das dritte Drittel geblieben?

H könnte sich aber auch an das berühmte Ziegenproblem erinnern, wo nach der Information durch den Moderator die Wahrscheinlichkeit für die noch mögliche dritte Antwort auf $\frac{2}{3}$ steigt damit die Gesamtwahrscheinlichkeit bei 1 bleibt.

Das könnte aber auch E denken! Jetzt haben wir insgesamt $\frac{4}{3}$!

Woher ist das vierte Drittel gekommen?

H könnte aber auch überlegen: Es bleiben noch 2 Antworten offen; genau eine davon ist richtig. Also sind die Wahrscheinlichkeiten für H und E gleich, und zwar jeweils $\frac{1}{2}$.

Betrachten wir zur Auflösung dieses „Trilemmas“, wie sich eine vergleichbare Situation im sogenannten Ziegenproblem darstellt.

2 Zur Geschichte des Ziegenproblems[1]

2.1 Drei-Gefangenen-Problem

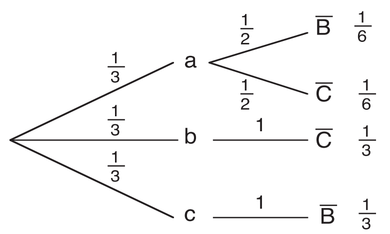
Den Anfang macht 1959 Martin Gardner mit dem *Drei-Gefangenen-Problem*. Verkürzt stellt sich das Problem wie folgt dar.

> A, B und C sind zum Tode verurteilt.[2] Sie werden informiert, dass einer von ihnen begnadigt wurde. Mehr erfahren sie nicht. Die Chance für eine Begnadigung ist für jeden von ihnen $\frac{1}{3}$. A überlegt, dass mindestens einer der beiden anderen hingerichtet werden wird, und bittet daher den Wärter, ihm den Namen eines der beiden zu sagen, der sicher hingerichtet werden wird. Der Wärter antwortet, dass es B sei. Daraufhin ist für A klar, dass nur mehr er oder C hingerichtet werden kann und somit seine Chance, begnadigt worden zu sein, auf $\frac{1}{2}$ gestiegen ist. Er informiert seinen Mithäftling C über die Situation. C ist darüber sehr erfreut; denn er überlegt sich, dass seine Chance nicht nur auf $\frac{1}{2}$, sondern auf $\frac{2}{3}$ gestiegen ist, wohingegen die von A bei $\frac{1}{3}$ geblieben ist. Hat nun A oder hat nun C recht?

Zur Beantwortung zeichnen wir einen Baum mit folgenden Symbolen:

x := »X wurde begnadigt«

$\overline{X}$:= »Der Wärter sagt: „X wurde begnadigt.“«



Man erhält daraus

$$P_{\overline{B}}(a) = \frac{P(a\,\overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3} \text{ und}$$

$$P_{\overline{B}}(c) = \frac{P(c\,\overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{1/3}{3/6} = \frac{2}{3}.$$

C hat recht. Die Wahrscheinlichkeit, dass A begnadigt wurde, bleibt bei $\frac{1}{3}$, wohingegen seine Wahrscheinlichkeit, begnadigt worden zu sein, auf $\frac{2}{3}$ gestiegen ist.

Ohne Baum könnte man folgendermaßen überlegen. Der Wärter hat dem A nichts Neues verraten; denn A wusste von Anfang an, dass mindestens einer der beiden anderen hingerichtet werden wird. Also ist das sichere Ereignis eingetreten, und seine Wahrscheinlichkeit ändert sich dadurch nicht.

Für C hingegen ist die Information nicht das sichere Ereignis; denn er ist nicht der Empfänger der Nachricht. Der Wärter hätte dem A auch C nennen können. Also ist die Nachricht für C von Belang – im Gegensatz zu A – und verbessert daher seine Wahrscheinlichkeit, begnadigt worden zu sein.

Noch kürzer: Weil die Wahrscheinlichkeit von A bei $\frac{1}{3}$ geblieben ist, muss die von C auf $\frac{2}{3}$ gestiegen sein.

Mathematisch äquivalente Fassungen dieses Gefangenenproblems tauchen in der Folgezeit in einfacherer Form in verschiedenen Einkleidungen auf.

2.2 Drei-Schachtel- oder Monty-Hall-Problem

1975 stellt Steve Selvin in einem Leserbrief das *Monty-Hall-* oder *Drei-Schachtel-Problem*.

> Der Moderator Monty Hall lässt einen Kandidaten K eine von drei Schachteln A, B oder C auswählen. Eine davon enthält die Schlüssel für ein Auto. Die beiden anderen Schachteln sind leer. Wenn K die Schachtel mit den Schlüsseln wählt, gehört ihm das Auto. K wählt Schachtel B. Monty öffnet eine der beiden anderen Schachteln, es sei A. Sie ist leer. Daraufhin sagt er: »Die Autoschlüssel liegen also entweder in Ihrer Schachtel B oder in der Schachtel C. Weil nur diese zwei Schachteln übrig sind, ist die Wahrscheinlichkeit, dass Ihre Schachtel den Schlüssel enthält, jetzt $\frac{1}{2}$.« Nach einigem Nachdenken tauscht K seine Schachtel gegen Schachtel C.

Frage: Hat K zu seinen Gunsten gehandelt?

2.3 Drei-Muschel- oder Drei-Karten-Problem

1982 bringt Martin Gardner die Einkleidungen *Drei-Muschel-* und *Drei-Karten-Problem*.

> Unter genau einer von drei Muscheln ist eine Erbse versteckt. K wählt eine Muschel. Da der Muschelspieler weiß, wo die Erbse ist, kann er jederzeit eine leere Muschel umdrehen, ohne dass dabei K eine für ihn nützliche Information erhält. Die Wahrscheinlichkeit, dass K die Erbsenmuschel gewählt hat, bleibt $\frac{1}{3}$ und steigt nicht auf $\frac{1}{2}$, wie man vermuten könnte.

Frage: Ist dies richtig?

> Pik-, Herz- und Karo-Ass liegen verdeckt auf dem Tisch. K wählt eine Karte. Die Wahrscheinlichkeit, dass er das Pik-Ass gewählt hat, ist $\frac{1}{3}$. Dann dreht er eine der beiden anderen Karten um. Erscheint dabei das Pik-Ass, wird das Spiel nicht gewertet. Man beginnt ein neues Spiel und spielt so lange, bis entweder Herz- oder Karo-Ass beim Umdrehen erscheint. Die Wahrscheinlichkeit, dass K ursprünglich Pik-Ass gewählt hat, erhöht sich dadurch von $\frac{1}{3}$ auf $\frac{1}{2}$.

Frage: Ist dies richtig?

2.4 Drei-Türen- oder Ziegenproblem

1990 erzeugt Marylin vos Savants Lösung des *Drei-Türen-* oder *Ziegenproblems* große Unruhe, auch unter Mathematikern.

> In einer Fernsehshow steht hinter einer von drei verschlossenen Türen ein Auto, hinter den beiden anderen Türen je eine Ziege. K muss eine der drei Türen auswählen. Er wählt Tür 1. Daraufhin öffnet der Moderator, der weiß, was sich hinter den jeweiligen Türen befindet, eine andere Tür, z. B. 3. Man sieht eine Ziege. Nun fragt er K, ob er bei Tür 1 bleiben oder stattdessen Tür 2 wählen wolle.

Vos Savant empfiehlt zu wechseln. Hat sie recht?

3 Variationen des Ziegenproblems

Das so einfach klingende Ziegenproblem erweist sich bei näherem Hinsehen durch Präzisierung der möglichen Umstände als sehr variantenreich. Einige dieser möglichen Variationen seien im Folgenden vorgeführt. Gemeinsam sind all diesen Varianten die folgenden Bedingungen.

- Der Kandidat K weiß nicht, hinter welcher Tür das Auto steht.
- Das Auto A steht mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ hinter der Tür i, $i = 1, 2, 3$. Hinter den beiden anderen Türen steht jeweils eine Ziege. Das ergibt drei gleichwahrscheinliche Möglichkeiten, nämlich *azz*, *zaz* und *zza*.
- Der Kandidat K wählt ohne Beschränkung der Allgemeinheit Tür 1.
- Der Moderator M öffnet auf gut Glück eine Tür mit folgenden Einschränkungen:
  - Wenn er weiß, dass K Tür 1 gewählt hat, dann öffnet er Tür 1 nicht.
  - Wenn er weiß, hinter welcher Tür das Auto steht, dann öffnet er diese Tür nicht.
- Der Kandidat K weiß, nach welchen Gesichtspunkten M entscheiden wird.

Allen Variationen liegt die folgende Situation zugrunde

M öffnet eine Tür, K sieht eine Ziege

und es stellt sich die Frage:

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Auto hinter Tür 1 steht?

Zur Beantwortung werden wir Bäume verwenden; dabei betrachten wir die folgenden Ereignisse:

a := »Hinter der *geschlossenen* Tür steht das Auto«

A := »Hinter der *geöffneten* Tür steht das Auto«

z := »Hinter der *geschlossenen* Tür steht eine Ziege«

Z := »Hinter der *geöffneten* Tür steht eine Ziege«

Z_i := »Hinter der *geöffneten* Tür i steht eine Ziege«

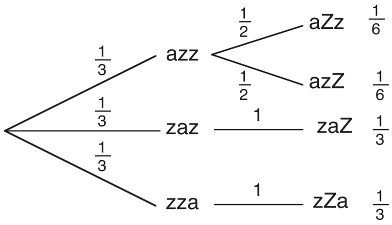
Die folgende Tabelle dient der Orientierung, wie wir das Ziegenproblem zunächst variieren wollen.

<table>
<tr><td colspan="4">3.1
M weiß, dass K Tür 1 gewählt hat</td><td colspan="4">3.2
M weiß nicht, dass K Tür 1 gewählt hat</td></tr>
<tr><td colspan="2">3.1.1
M weiß, wo das Auto steht</td><td colspan="2">3.1.2
M weiß nicht, wo das Auto steht</td><td colspan="2">3.2.1
M weiß, wo das Auto steht, und öffnet eine Ziegentür</td><td colspan="2">3.2.2
M weiß, nicht, wo das Auto steht</td></tr>
<tr><td>3.1.1.1
M öffnet eine Ziegentür</td><td>3.1.1.2
M öffnet Tür 2, falls Z_2, sonst Tür 3 mit Z_3</td><td>3.1.2.1
M öffnet Tür 2 oder 3: Ziege</td><td>3.1.2.2
M öffnet Tür 2: Ziege</td><td>3.2.1.1
M öffnet Tür 1: Ziege</td><td>3.2.1.2
M öffnet Tür 2 oder 3: Ziege</td><td colspan="2">3.2.2.1
M öffnet irgendeine Tür: Ziege</td><td>3.2.2.2
M öffnet Tür 2: Ziege</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>3.2.2.1.1
M öffnet Tür 1: Ziege</td><td>3.2.2.2.2
M öffnet Tür 2 oder 3: Ziege</td><td></td></tr>
</table>

3.1 M weiß, dass K Tür 1 gewählt hat.

3.1.1 M weiß, wo das Auto steht.

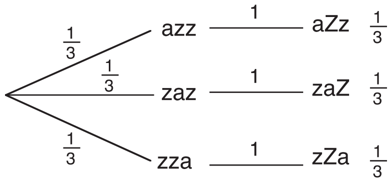
3.1.1.1 M öffnet irgendeine Ziegentür.



$$P_Z(azz) = \frac{P(azz\ Z)}{P(Z)} = \frac{1/3}{1} = \frac{1}{3}.$$

Durch das Öffnen der Ziegentür hat sich die Wahrscheinlichkeit ⅓, dass hinter Tür 1 das Auto steht, nicht geändert. Ein Wechsel zur anderen noch geschlossenen Tür bringt eine Verdopplung der Wahrscheinlichkeit auf ⅔.

3.1.1.2 M öffnet Tür 2, falls dahinter eine Ziege steht, andernfalls Tür 3.



$$P_Z(azz) = \frac{P(azz\ Z)}{P(Z)} = \frac{1/3}{1} = \frac{1}{3}$$

Durch das Öffnen von Tür 2 oder Tür 3 sieht K eine Ziege. Die Wahrscheinlichkeit, dass hinter Tür 1 das Auto steht, ändert sich dadurch nicht, weil der Moderator ja sicher eine Ziegentür öffnet.

$$P_{Z_2}(azz) = \frac{P(azz\ Z_2)}{P(Z_2)} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}$$

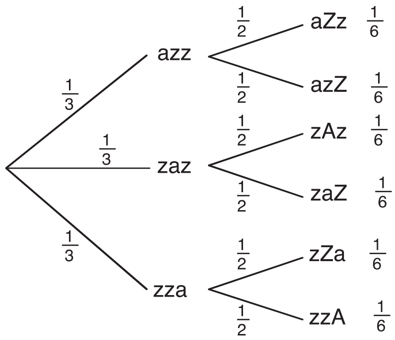
Durch das Öffnen der Ziegentür 2 hat sich die Wahrscheinlichkeit ⅓, dass hinter Tür 1 das Auto steht, auf ½ geändert. Ein Wechsel zur anderen noch geschlossenen Tür bringt nichts.

$$P_{Z_3}(azz) = \frac{P(azz\ Z_3)}{P(Z_3)} = \frac{0}{1/3} = 0$$

Durch das Öffnen der Ziegentür 3 hat sich die Wahrscheinlichkeit dafür, dass hinter Tür 1 das Auto steht, von ⅓ auf 0 reduziert. Das Auto steht sicher hinter Tür 2!

3.1.2 M weiß nicht, wo das Auto steht.

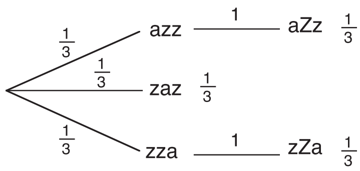
3.1.2.1 M öffnet Tür 2 oder Tür 3, und K sieht eine Ziege.



$$P_Z(azz) = P(azz\ Z)/P(Z) = \frac{1/3}{4/6} = \frac{1}{2}$$

Durch das Öffnen der Ziegentür 2 oder 3 mit der Ziege dahinter hat sich die Wahrscheinlichkeit ⅓, dass hinter Tür 1 das Auto steht, auf ½ geändert. Ein Wechsel zur anderen noch geschlossenen Tür bringt nichts.

3.1.2.2 M öffnet grundsätzlich Tür 2, und K sieht eine Ziege.

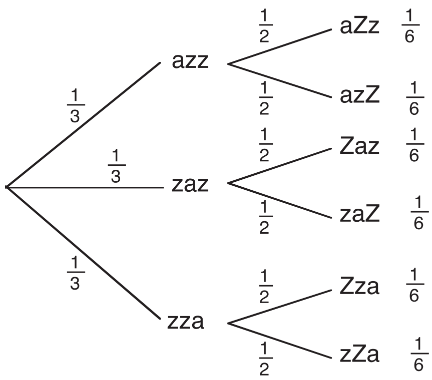


$$P_{Z_2}(azz) = \frac{P(azz\ Z_2)}{P(Z_2)} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}.$$

Durch das Öffnen der Ziegentür 2 hat sich die Wahrscheinlichkeit ⅓, dass hinter Tür 1 das Auto steht, auf ½ geändert. Ein Wechsel zur anderen noch geschlossenen Tür bringt nichts.

3.2 M weiß nicht, dass K Tür 1 gewählt hat.

3.2.1 M weiß, wo das Auto steht, und öffnet irgendeine Ziegentür; K sieht also eine Ziege.



Wir müssen zwei Fälle unterscheiden.

3.2.1.1 M öffnet Tür 1; K sieht eine Ziege.

$P_{Z_1}(azz) = 0$; ferner gilt

$$P_{Z_1}(zaz) = P_{Z_1}(zza) = \frac{1/6}{2/6} = \frac{1}{2}.$$

Das Auto steht also mit gleicher Wahrscheinlichkeit ½ hinter Tür 2 oder Tür 3. Ein Wechsel zu einer dieser Türen vergrößert die Wahrscheinlichkeit, dass hinter dieser Tür dann das Auto steht, von ⅓ auf ½.

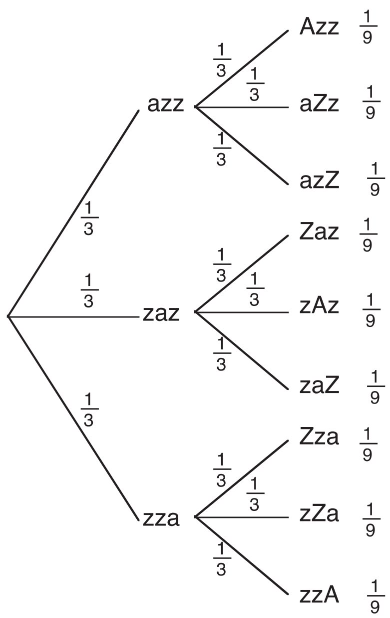
3.2.1.2 M öffnet eine der Türen 2 oder 3; K sieht eine Ziege.

$$P_Z(azz) = P_{Z_2 Z_3}(azz) = \frac{P(azz\, Z_2\, Z_{3\div})}{P(Z)} = \frac{2/6}{4/6} = \frac{1}{2}$$

Durch das Öffnen von Tür 2 oder Tür 3 hat sich die Wahrscheinlichkeit ⅓, dass hinter Tür 1 das Auto steht, von ⅓ auf ½ erhöht. Ein Wechsel zur anderen noch geschlossenen Tür bringt nichts.

3.2.2 M weiß nicht, wo das Auto steht.

3.2.2.1 M öffnet irgendeine Tür und man sieht eine Ziege.



Auch hier müssen wir zwei Fälle unterscheiden.

3.2.2.1.1 M öffnet Tür 1, und K sieht eine Ziege.

$P_{Z_1}(azz) = 0$; ferner gilt

$$P_{Z_1}(zaz) = P_{Z_1}(zza) = \frac{1/9}{2/9} = \frac{1}{2}.$$

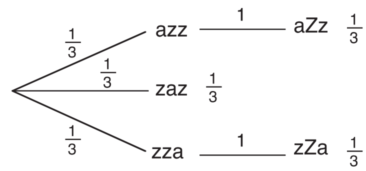
Das Auto steht also mit gleicher Wahrscheinlichkeit ½ hinter Tür 2 oder Tür 3. Ein Wechsel zu einer dieser Türen vergrößert die Wahrscheinlichkeit, dass hinter dieser Tür dann das Auto steht, von ⅓ auf ½.

3.2.2.1.2 M öffnet eine der Türen 2 oder 3; K sieht eine Ziege.

$$P_Z(azz) = P_{Z_2 Z_3}(azz) = \frac{P(azz\, Z_2\, Z_{3\div})}{P(Z)} = \frac{2/9}{4/9} = \frac{1}{2}$$

Durch das Öffnen von Tür 2 oder Tür 3 hat sich die Wahrscheinlichkeit ⅓, dass hinter Tür 1 das Auto steht, von ⅓ auf ½ erhöht. Ein Wechsel zur anderen noch geschlossenen Tür bringt nichts.

3.2.2.2 M öffnet grundsätzlich Tür 2, und K sieht eine Ziege.



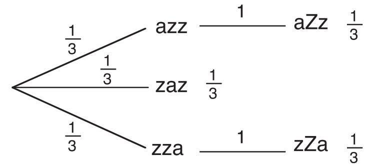
$$P_{Z_2}(azz) = \frac{P(azz\, Z_2)}{P(Z_2)} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}.$$

Durch das Öffnen der Ziegentür 2 hat sich die Wahrscheinlichkeit ⅓, dass hinter Tür 1 das Auto steht, auf ½ geändert. Ein Wechsel zur anderen noch geschlossenen Tür bringt nichts.

Im Folgenden behandeln wir noch zwei von der klassischen Aufgabe abweichende Variationen, um die Vielfalt der Möglichkeiten aufzuzeigen.

<table>
<tr><td colspan="3">M weiß, dass K Tür 1 gewählt hat und weiß,
wo das Auto steht</td></tr>
<tr><td>3.3
Zweiter Kandidat
L vor Tür 3</td><td colspan="2">3.4
Vier Türen, ein Auto und drei Ziegen</td></tr>
<tr><td></td><td>3.4.1
M öffnet eine
Ziegentür</td><td>3.4.2
M öffnet zwei
Ziegentüren</td></tr>
</table>

3.3 Es gibt neben K einen zweiten Kandidaten L. Dieser wählt Tür 3. M weiß, welche Türen K und L gewählt haben; außerdem weiß er, wo das Auto steht. M öffnet daher die Türen 1 und 3 nicht, ebensowenig wie die Autotür.



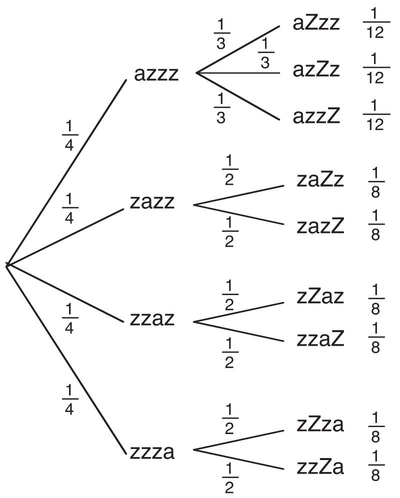
$$P_{Z_2}(azz) = \frac{P(azz\, Z_2)}{P(Z_2)} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}$$

$$P_{Z_2}(zza) = \frac{P(zza\, Z_2)}{P(Z_2)} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}$$

Durch das Öffnen der Ziegentür 2 hat sich die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$, dass hinter einer Kandidatentür das Auto steht, auf $\frac{1}{2}$ geändert. Die Gewinnwahrscheinlichkeit ist aber immer noch für beide gleich.

3.4 V. V. Bapeswara Rao und Bhaskara Rao schlugen 1992 folgende Variante vor: Es gibt einen Kandidaten K und vier Türen, und zwar eine Autotür und drei Ziegentüren. M weiß, dass K Tür 1 gewählt hat und wo das Auto steht.

3.4.1 M öffnet eine Ziegentür.

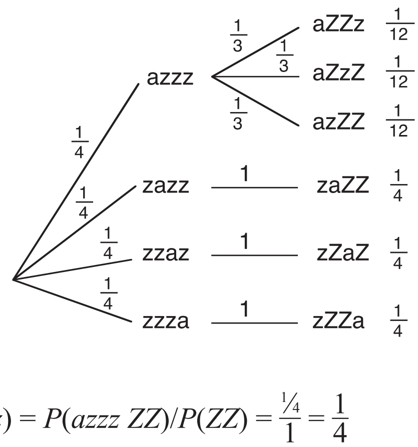


$$P_Z(azzz) = \frac{P(azzz\ Z)}{P(Z)} = \frac{1/4}{1} = \frac{1}{4}$$

Außer Tür 1 sind noch zwei Türen geschlossen. Hinter ihnen steht das Auto mit gleicher Wahrscheinlichkeit , nämlich $\frac{3}{8}$.

Es lohnt sich für K, die Tür zu wechseln; die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dann das Auto hinter dieser Tür steht, würde um $\frac{1}{8}$ steigen.

3.4.2 M öffnet zwei Ziegentüren.



$$P_{ZZ}(azzz) = P(azzz\ ZZ)/P(ZZ) = \frac{1/4}{1} = \frac{1}{4}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass K die Autotür gewählt hat, ist trotz des Öffnens zweier Ziegentüren bei $\frac{1}{4}$ geblieben. Hinter der letzten noch geschlossenen Tür steht das Auto also mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$. Ein Wechsel zu dieser Tür ist für K also von Vorteil; die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dann das Auto hinter dieser Tür steht, würde sich verdreifachen.

4 Epilog

Auch wenn K nichts über den Informationsstand von M weiß, ist es nie ungünstig, die Tür zu wechseln; schlimmstenfalls bleibt seine Gewinnwahrscheinlichkeit gleich. Rückblickend sieht man, dass die Wahrscheinlichkeiten bei der Masterfrage von „Wer weiß denn so was?“ denen im Fall **3.3** entsprechen. Die Gewinnwahrscheinlichkeiten beider Teams steigen zwar von $\frac{1}{3}$ auf $\frac{1}{2}$, aber das ist leider keine so gute Nachricht, wie man meinen könnte. Die Chancen beider Teams waren vor der Mitteilung gleich und sind es nachher immer noch. Es ist jetzt nur sicher, dass eines der beiden Teams recht hat. Manchmal kann auch die beste Stochastik den Nebel der Ungewissheit nur wenig lichten!

Wir haben mit unseren Beispielen nur eine kleine Auswahl aus den vielen Möglichkeiten getroffen. Man kann sich leicht weitere Variationen ausdenken. So schlug Marylin vos Savant zur Verdeutlichung des Problems die folgende Situation vor, in der wir das Wissen des Moderators jedoch noch variieren: Es gibt 1 Million Türen; hinter einer steht ein Auto A, hinter den anderen 999 999 Türen je eine Ziege. K wählt Tür 1 und stellt sich vor diese Tür. M öffnet 999 998 Türen, aber nicht Tür 1, wenn er weiß, daß K sie gewählt hat, und auch nicht die Tür, hinter der das Auto steht, wenn er weiß, wo das Auto steht.

Soll K wechseln, wenn M 999 998 Ziegentüren öffnet und wenn

a) M weiß, wo K steht und wo A steht,

b) M weiß, wo K steht, aber nicht, wo A steht,

c) M nicht weiß, wo K steht, aber wo A steht,

d) M weder weiß, wo K steht noch wo A steht?

…

Anmerkungen

1 Eine ausführliche Darstellung findet man in Haller und Barth (erscheint 2016).

2 Die Todesstrafe war 1959 noch sehr weit verbreitet und wird auch heute noch in den meisten Bundesstaaten der USA verhängt.

Literatur

Gardner, M. (1959): Mathematical Games. Problems involving questions of probability and ambiguity. In: *The Scientific American* 201, 4 (Okt. 1959) S. 180 bis 182.

Gardner, M. (1982): aha! Gotcha: Paradoxes to Puzzle and Delight. New York: W. H. Freeman. – Deutsche Übersetzung: Gotcha. Paradoxien für den Homo Ludens. München: Hugendubel.

Haller R.; Barth F. (2016): Berühmte Aufgaben der Stochastik. Von den Anfängen bis heute. Zweite Auflage. Berlin: de Gruyter.

Rao V. V. B.; Rao B. (1992): A Three-Door Game Show and some of its Variants. In: *The Mathematical Scientist* 17, 3, S. 89–94.

Selvin, S. (1975a): A Problem in Probability. In: *The American Statistician* 29, 1, S. 67.

Selvin, S. (1975b): On the Monty Hall Problem. In: *The American Statistician* 29, 3, S. 134.

Anschrift der Verfasser

Friedrich Barth
Abbachstraße 23
80992 München
e.f.barth@t-online.de

Rudolf Haller
Nederlinger Straße 32a
80638 München
rudolf.haller@arcor.de